



Electrónica

Tema 2: **Amplificadores Operacionales.**

Respuesta en frecuencia.





Índice



1. Introducción

- Objetivos y herramientas
- Modelado de señales
- Caracterización de amplificadores en el dominio de la frecuencia
- Bandas de frecuencia del amplificador.
- Frecuencia de corte. Ancho de banda (BW)
- Efecto de las limitaciones de alta y baja frecuencia

2. Función de transferencia

- Laplace, Fourier, polos y ceros.
- Representación grafica: diagrama de bode. Diagrama de bode de módulo.

3. Diagrama de Bode

- Términos básico. Modulo. Fase. Ejemplo

4. Análisis por bandas de frecuencia

- F. de T. en función de la ganancia en frecuencias medias.
- Simplificación de la F.T. a frec. Medias, bajas y altas.
- Frecuencias de corte. Polo dominante. Sin polo.

5. Aplicaciones básicas: Filtros con AO ideal

- Filtro paso bajo con polo. Filtro paso alto polo-cero. Otros filtros.
- Otras configuraciones básicas



Referencias



- ❑ Material de estudio:
 - Malik, capítulo 2, secciones:
 - *De 2.2 a 2.3.4; de 2.5.1 a 2.5.10; y 2.6*
 - Sedra-Smith, capítulo 2, secciones:
 - *De 2.1 a 2.6; y 2.9*
 - Hambley, capítulo 2.
 - En todos los casos:
 - *excluidas las dependencias internas con la frecuencia y el trabajo en “gran señal”.*
- ❑ Gráficas extraídas de los textos y secciones detallados.



Introducción

Motivación



- ❑ Señales y amplificadores.
 - Los amplificadores han de procesar señales de muy diversa naturaleza
- ❑ Objetivos básicos:
 - Adaptar niveles de la señal (tensión, corriente, potencia)...
 - Optimizar la interconexión a generadores y cargas...
 - **Ajustar las características en frecuencia de la información de entrada:**
 - *Por ejemplo: modificar o seleccionar las componentes de la señal*



Introducción

Objetivos y herramientas



- ❑ Necesidades desde el punto de vista de la Ingeniería
 - Poder **analizar** el comportamiento de los circuitos en el **dominio de la frecuencia**.
 - En función de tal análisis, **conocer las dependencias y relaciones** entre dispositivos, circuitos y sus prestaciones (ganancias, etc.)
 - Tener **capacidad para ajustar y adaptar** las características del amplificador a la aplicación deseada.

- ❑ Herramientas necesarias
 - Conocimiento de las características de los dispositivos
 - Específicamente *en función de la frecuencia* (ω)
 - Conocimiento de técnicas de análisis específicas
 - Por ejemplo: **Bode**, para *identificar las dependencias* importantes.
 - Conocimiento de configuraciones típicas para funciones típicas
 - Por ejemplo: *filtros* de señal.



Introducción

Modelado de señales



- ❑ Las señales reales son muy complejas de modelar
 - Fenómenos electromagnéticos (ecuaciones de Maxwell)
 - Ecuaciones diferenciales complejas de variables complejas
 - El problema general se simplifica, según el caso.

- ❑ Un ejemplo: el condensador.

- Fundamento físico: el tiempo (t) → ecuación diferencial

- Señales cualesquiera, que varían en el tiempo

- Exacto pero difícil de analizar

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

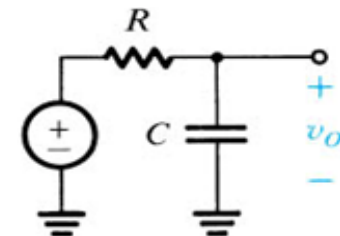
- Simplificación: frecuencia (ω) → Fourier

- Sólo para **Régimen Permanente Senoidal (R.P.S.)**

- Limitado, pero fácil de analizar

- Concepto de **impedancia**

- Análisis de Circuitos en **R.P.S.**



$$I_C = (C \cdot j\omega) \cdot V_C$$



Introducción

Modelado de señales: ¿Por qué senoidal?



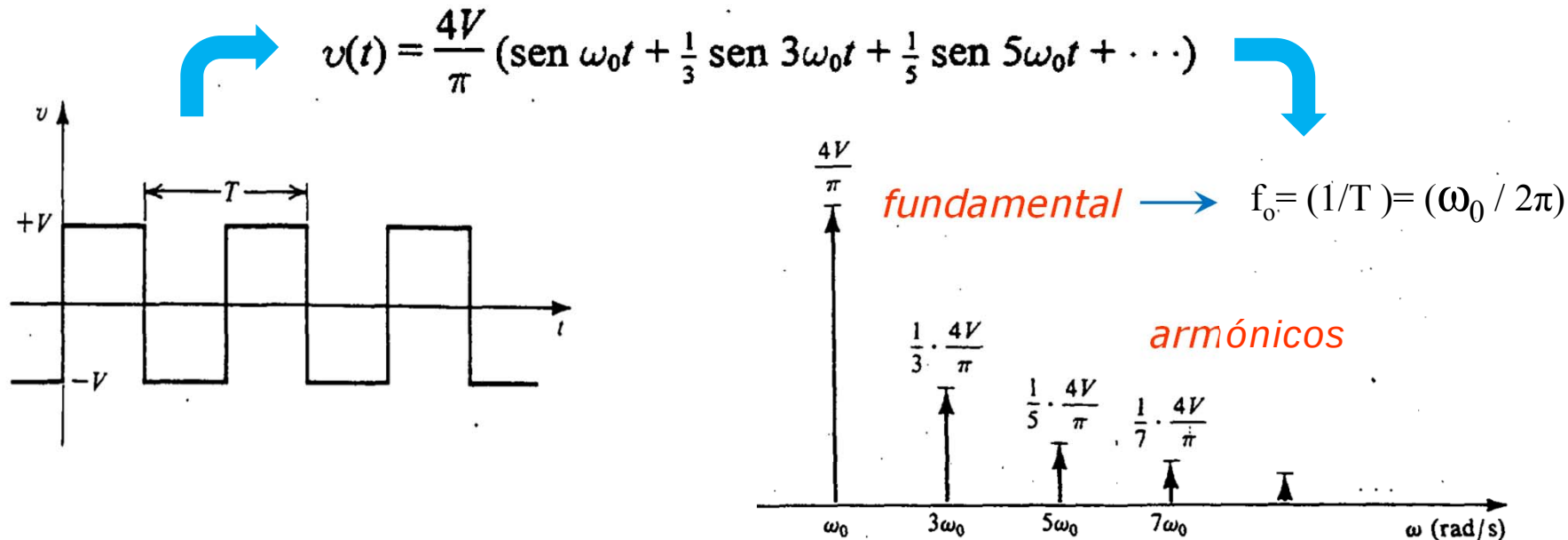
❑ Régimen Permanente Senoidal.

- En el dominio de la frecuencia

❑ Y podemos tratar **todo tipo de señales periódicas**

- El análisis de Fourier nos *aproxima* al complejo problema real.

Señal periódica $\longrightarrow$ Serie de Fourier $\longrightarrow$ Σ señales senoidales





Introducción

Modelado de señales: ¿Sólo senoidal?



- ❑ El análisis en Fourier está limitado a **R.P.S.**
- ❑ Una aproximación más general es el **análisis en Laplace**
 - También transforma las derivadas de las ecuaciones diferenciales en multiplicaciones
 - Puede aplicarse a cualquier forma de onda con origen en $t=0$
 - *Enfoque mucho más realista que Fourier*
 - *Pero matemáticamente bastante menos intuitivo*
- ❑ El análisis en Laplace usa una variable compleja:
 - La variable es: s con parte real e imaginaria $\rightarrow s = \sigma + j\omega$
 - **Tensiones, corrientes e impedancias** pueden ponerse como $f(s)$
- ❑ Simplificación muy importante:
 - Pasar entre Laplace y Fourier equivale a un cambio de variable

$$\text{Laplace } (s) \Leftrightarrow s = j\omega \Leftrightarrow \text{Fourier } (\omega)$$



Introducción

Caracterización de amplificadores en el dominio de la frec.

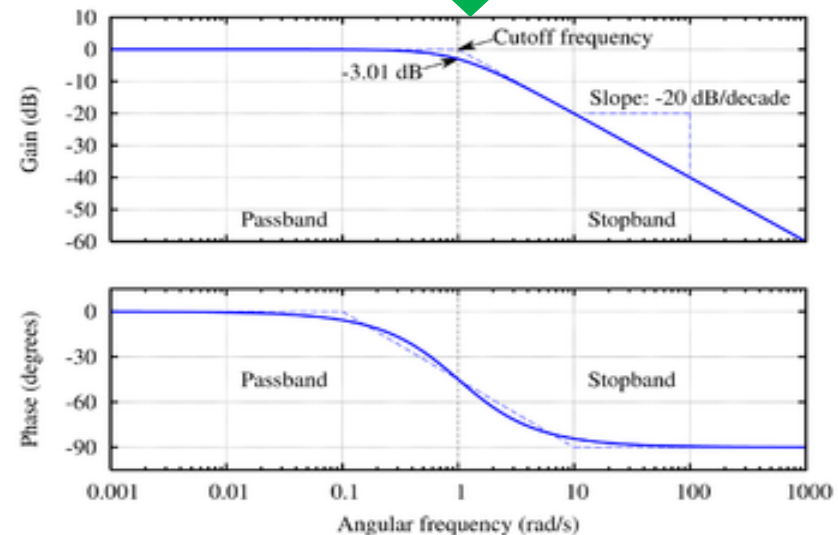


- ❑ Para caracterizar un amplificador, se trabajará en el **dominio de la frecuencia**:
 - Análisis y síntesis en R.P.S. (Régimen Permanente Senoidal)
 - Generalizamos los circuitos usando los conceptos de impedancia
 - Todos los parámetros son ahora $f(\omega)$.
 - *Por lo tanto son números complejos*

$$A_V(\omega) = |A_V(\omega)| \angle \varphi(\omega)$$



- ❑ Respuesta en frecuencia:
 - Expresiones matemáticas y/o gráficas de:
 - **Módulo**
 - **Fase**
 - *Puntos notables*
 - *Límites*
 - *Etc..*





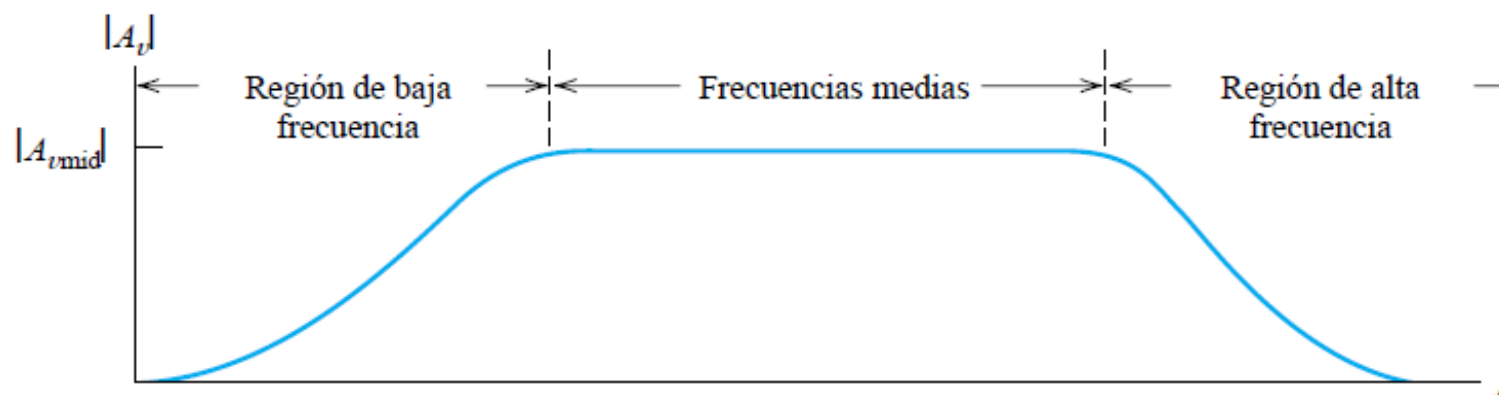
Introducción

Bandas de frecuencia del amplificador ¿A qué se deben?



- Frecuencias **medias**: zona en donde la ganancia es constante.

- Normalmente es la banda de frecuencia de interés en la aplicación.



- Otras zonas de la respuesta en frecuencia

- Frecuencias **altas**

- Las **capacidades internas** de los dispositivos u **otras limitaciones** o componentes externos provocan una caída de la ganancia.

- Frecuencias **bajas**

- Puede estar provocada por los elementos de acoplo entre etapas (C o L)
- Si el **acoplo** es **directo**, esta banda puede no existir. Esto es así en los llamados **amplificadores de continua**.



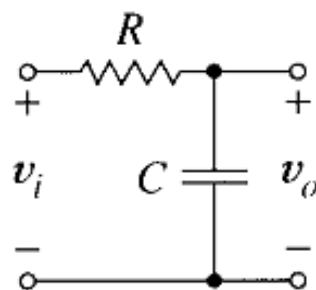
Introducción

Efecto de las limitaciones en alta frecuencia



- ❑ La respuesta en frecuencia y la temporal están relacionadas
 - Ancho de banda (BW) $\leftrightarrow$ Forma de onda (t).
 - Caso típico: **polo dominante** en **alta frecuencia**. Ejemplo:

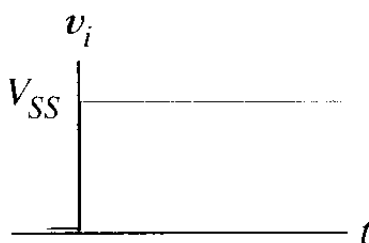
Filtro RC paso bajo:



$$\frac{V_o}{V_i}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_H}}$$

$$\omega_H = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

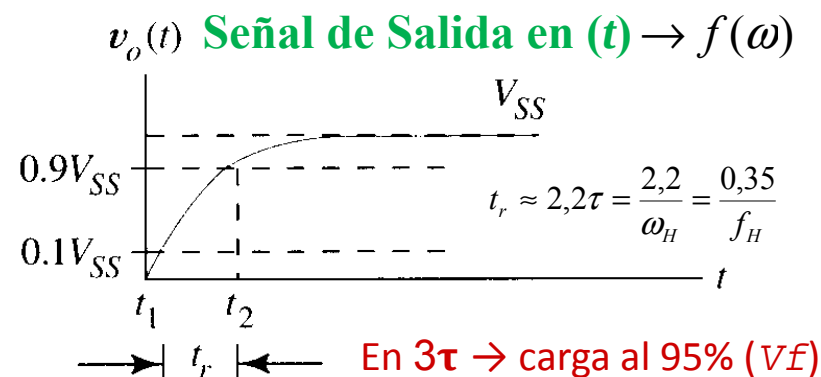
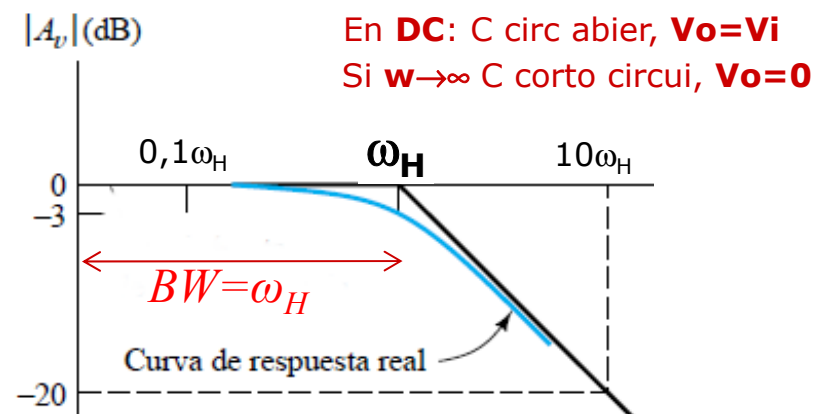
Entrada en (t): escalón



$$v_o(t) = V_{SS}(1 - e^{-\omega_H t})$$

$$v_i(t) = V_{SS}u(t) \rightarrow v_o(t) = V_{SS}(1 - e^{-t/\tau})$$

Respuesta en frecuencia $\rightarrow f(\omega)$





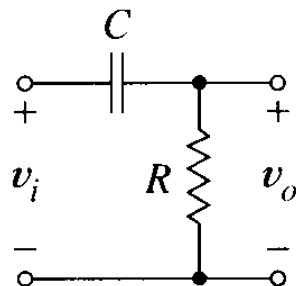
Introducción

Efecto de las limitaciones en baja frecuencia



- ❑ Hacia bajas frecuencias, se puede estudiar un caso similar
 - **Polo dominante en baja frecuencia.** Exige un cero en el origen.

Filtro RC paso alto:

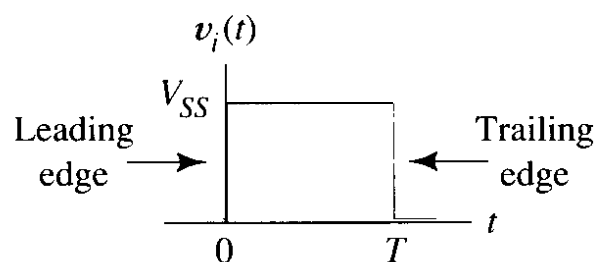


$$\frac{V_o}{V_i}(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_L}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_L}} = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_L}$$

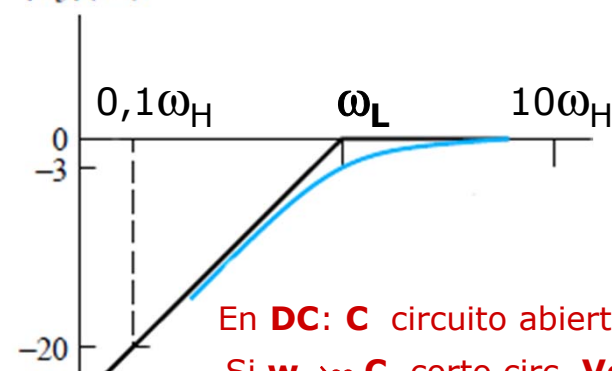
$$\omega_L = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

$$v_o(t) = V_{ss} e^{-\omega_L \cdot t}$$

Entrada en (t): escalón

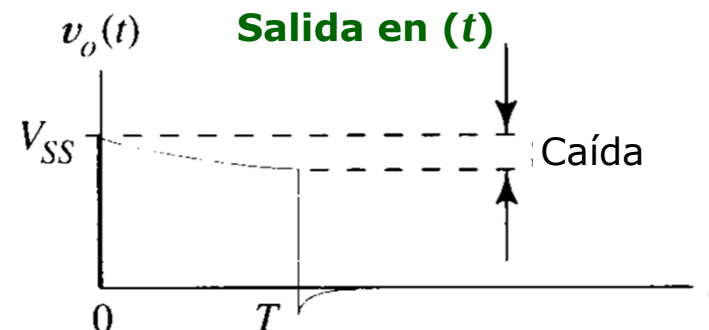


$|A_v|$ (dB) Respuesta en frecuencia



En **DC**: **C** circuito abierto **V_o=0**
Si $\omega \rightarrow \infty$ **C**, corto circ, **V_o=V_i**

Salida en (t)



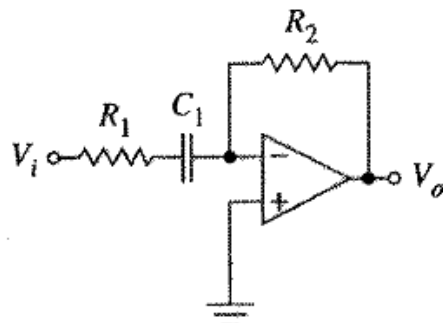


Aplicaciones básicas

Basadas en Amplificador Operacional ideal



❑ Ejemplo1-Filtro paso alto,



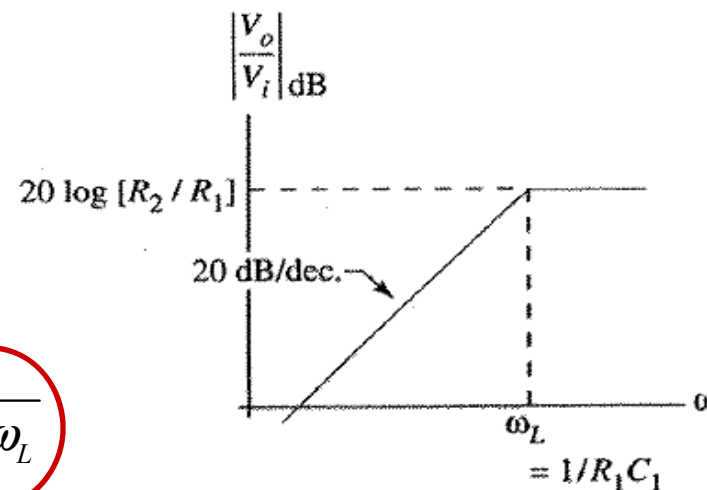
$$\begin{cases} Z_1 = R_1 + 1/sC_1 \\ Z_2 = R_2 \end{cases}$$

$$G_v(s) = \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{-R_2}{R_1 + 1/sC_1} = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{s}{s + 1/R_1C_1} = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{s}{s + \omega_L}$$

Filtro pasivo anterior

$$\frac{V_o}{V_i}(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_L}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_L}} = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_L}$$

La función de transferencia es la misma en frecuencia, cambia la ganancia de la configuración inversora del AO



❑ Una comprobación útil

- Observar el valor de la función de ganancia en los límites (0 e ∞) y compararlo con lo que sucedería en el circuito.
 - Para $s \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) los condensadores son circuitos abiertos
 - Para $s \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$) los condensadores son corto-circuitos
- ☑ Acostúmbrese a realizar esto de **forma sistemática**



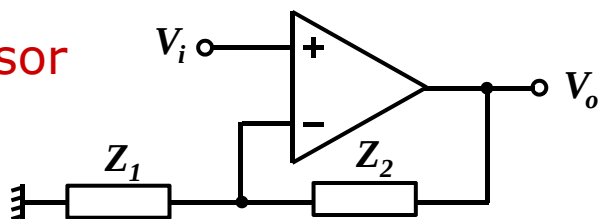
Aplicaciones básicas

Basadas en Amplificador Operacional ideal



- amplificador no inversor e inversor generalizado.

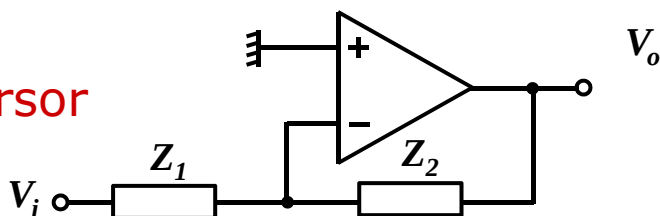
no
inversor



$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

- Según sea la naturaleza de las impedancias Z_2 y Z_1 resultará un tipo distinto de respuesta en frec.

inversor



$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

- En consecuencia, la f. de t. del circuito podrá ser muy diferente

- Formados por AO's ideales y redes RC.
 - El AO ideal tiene una ganancia con BW infinito, amplif. desde DC
 - Las redes RC introducen ceros y polos en la f. de t.
- Amplificador generalizado
 - Todas las configuraciones ya conocidas (amp. inversor, no inversor...) pueden generalizarse en la frec. usando impedancias



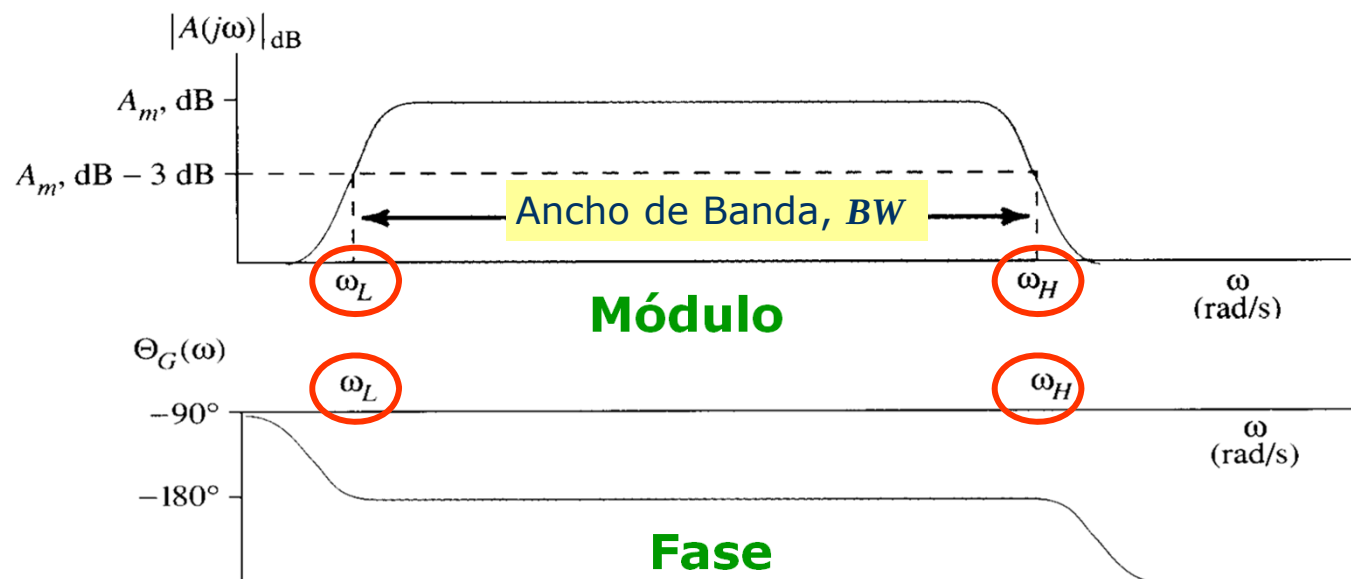
Aplicaciones básicas

Basadas en Amplificador Operacional ideal



- Respuesta de un amplificador. Frecuencias de corte. BW
Frecuencias límite entre **bandas** del amplificador:

■ Se elije como criterio el "**nivel para potencia mitad**"



Reducción en
V o I en un
factor
 $\sqrt{2}$, respecto
a frecuencias
medias

Definición de las
frecuencias de corte y
ancho de banda (BW)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_L \Rightarrow |A(j\omega_L)| = \frac{|A_m|}{\sqrt{2}} \leftrightarrow A_{dB}(j\omega_L) \approx A_{m,dB} - 3dB \\ \omega_H \Rightarrow |A(j\omega_H)| = \frac{|A_m|}{\sqrt{2}} \leftrightarrow A_{dB}(j\omega_H) \approx A_{m,dB} - 3dB \\ BW = f_H - f_L \quad (f_H = \omega_H / 2\pi, \quad f_L = \omega_L / 2\pi) \end{array} \right.$$



Función de transferencia de amplificadores

Laplace, Fourier, polos y ceros



- ❑ Al operar en el dominio de Laplace:
 - Las características del amplificador (ganancias e impedancias) serán relaciones polinómicas en la variable compleja (s)
 - Para obtener la **respuesta en frecuencia** bastará con hacer el cambio de variable **$s=j\omega$** , cuando sea necesario

Función de
transferencia
generalizada

$$A(s) = \frac{K_0 s^q (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_M)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_N)}$$

z_m : ceros
 p_n : polos

$K \in \mathfrak{R}$



Respuesta en
frecuencia

$$s = j\omega$$



$$A(j\omega) = \frac{K_0 (j\omega)^q (j\omega + z_1)(j\omega + z_2) \dots (j\omega + z_M)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \dots (j\omega + p_M)}$$



Función de transferencia de amplificadores

Laplace, Fourier, polos y ceros



- ❑ Polos y ceros pueden ser también complejos:
 - En una primera aproximación los tomaremos sólo como reales
- ❑ Formas alternativas de polos, ceros y función de transferencia:
 - Binomios como $(s+a)$ o como $(1+s/a)$: ¿a qué afecta?

$$A(s) = K_0 \frac{s^q (s + z_1)(s + z_1) \dots (s + z_M)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_N)}$$

↓

$$A(s) = \boxed{\frac{K_0 z_1 z_2 \dots z_M}{p_1 p_2 \dots p_N}} \cdot \frac{s^q \left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{z_M}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{p_N}\right)}$$

← K_p

Equivalentes: misma $A(s)$ con distinto **valor** de la constante

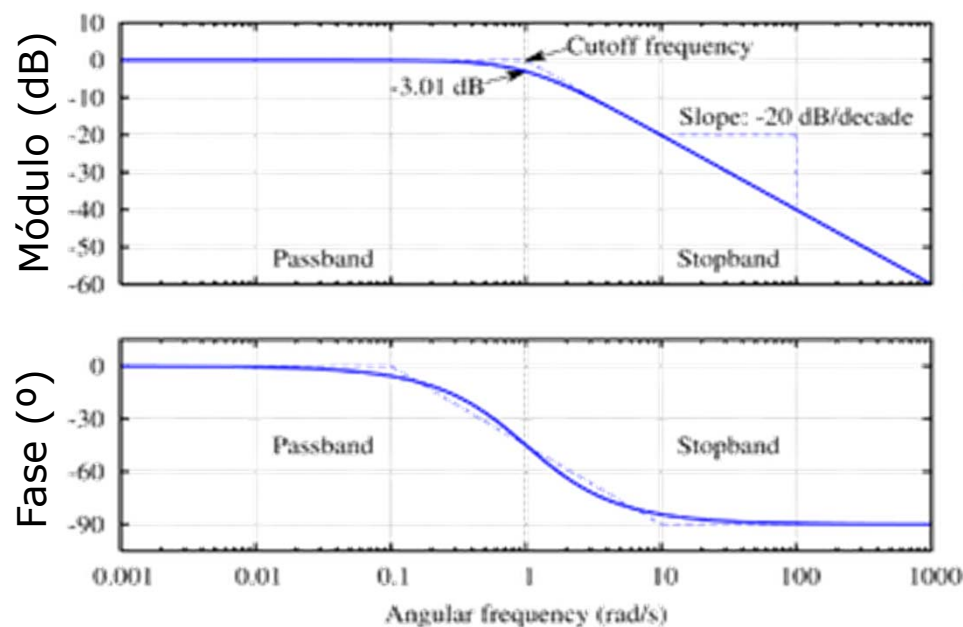


Función de transferencia de amplificadores.

Representación gráfica: diagramas de Bode

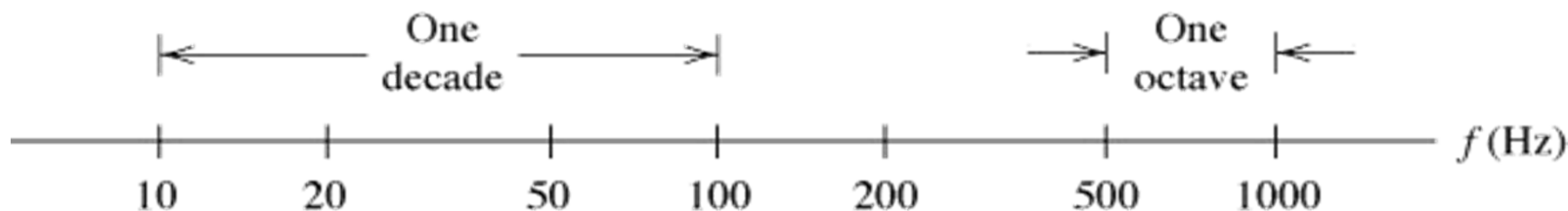


- Representan la respuesta en frecuencia $A(\omega)$:
 - Dos gráficas: módulo y fase, en función de ω (rad/s), o de f (Hz).



- Eje de módulo: lineal en dB
 - Idea de la relación entre amplitudes de salida y la entrada
- Eje de fase: lineal en grados
- Eje de frecuencias logarítmico
 - Visualiza mejor los efectos de polos y ceros

- **Octavas (oct)**, frecuencias x 2
- **Décadas (dec)**, frecuencia x10





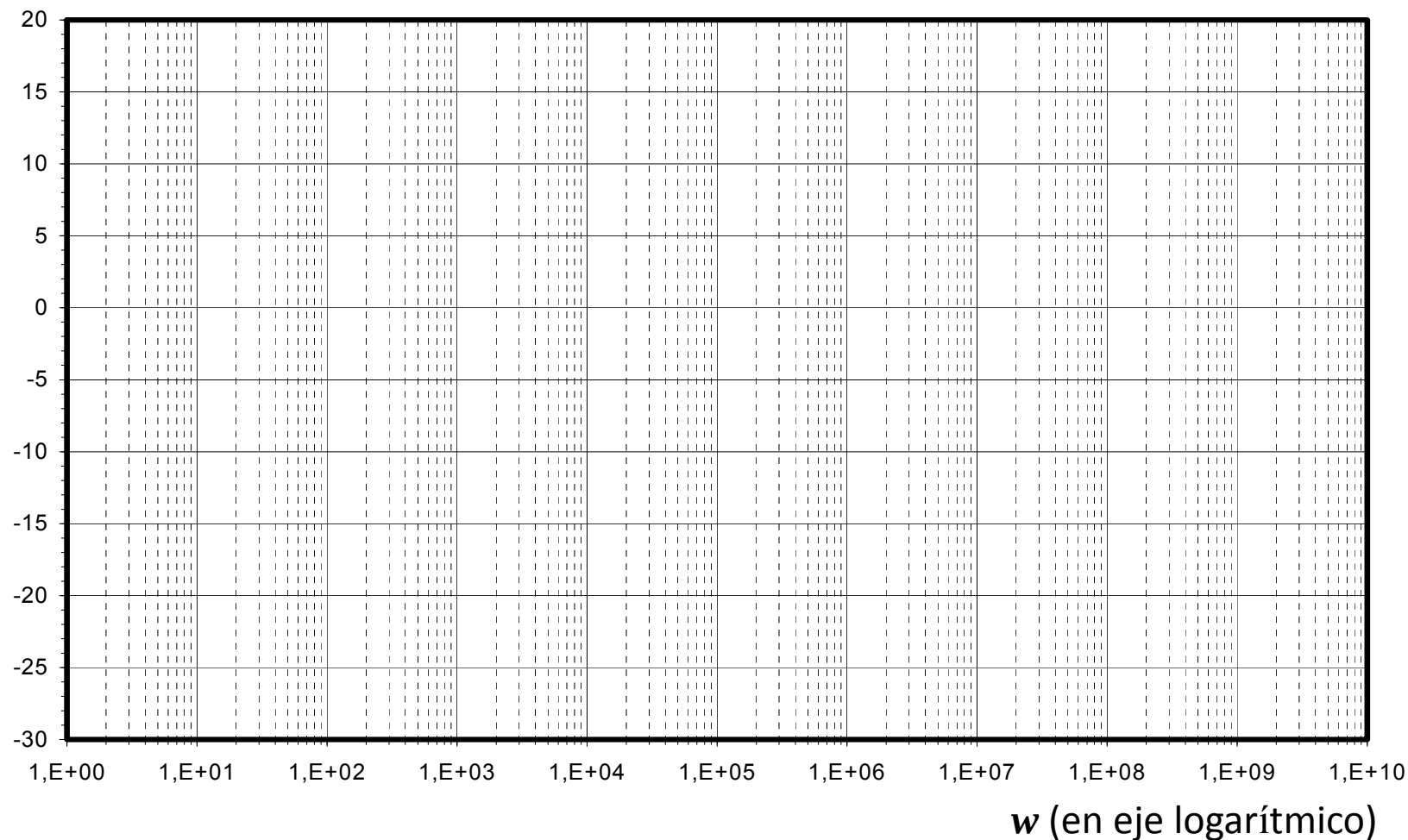
Función de transferencia de amplificadores

Diagrama de Bode de módulo



$|A(j\omega)|_{dB}$

Diagrama de Bode de módulo





Diagramas de Bode

Términos básicos



- ❑ La función de transferencia exacta puede obtenerse por cálculo automático
 - La representación del módulo en dB es muy ventajosa.
 - Permite hacer una **estimación**, mediante aproximaciones lineales:

$$|A(j\omega)| = K_p \frac{(j\omega)^q \left(1 + \frac{j\omega}{z_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{z_M}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{p_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{p_2}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{p_N}\right)}$$

(*) 

$$|A(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |A(j\omega)|$$



$$|A(\omega)|_{dB} = 20 \log K_p + 20q \log |j\omega| + \sum_{m=1}^M 20 \log \left|1 + j \frac{\omega}{z_m}\right| - \sum_{n=1}^N 20 \log \left|1 + j \frac{\omega}{p_n}\right|$$



Diagramas de Bode

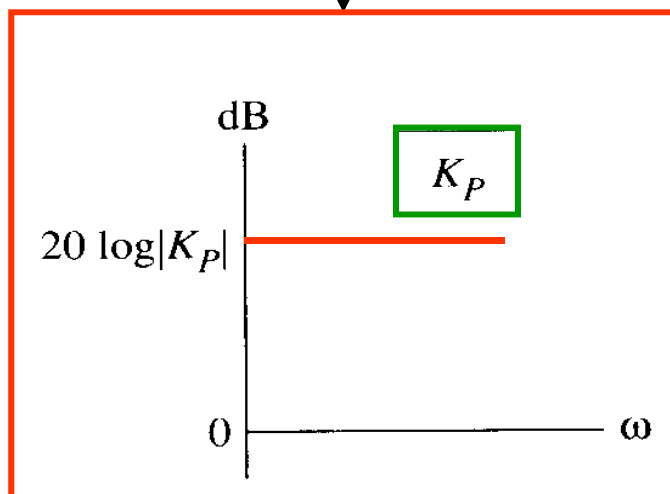
Términos básicos: Módulo



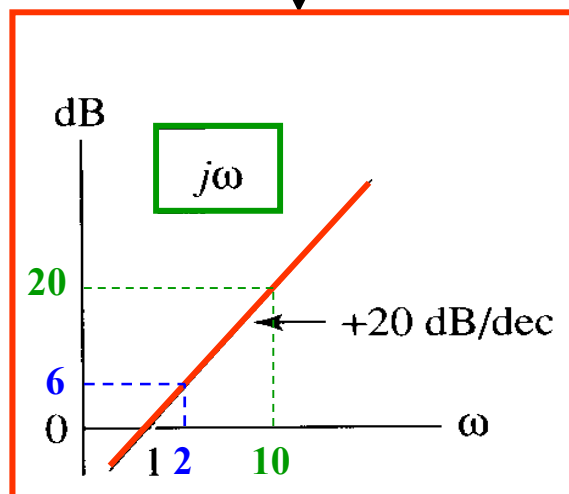
- Observamos la contribución de cada sumando al global:

$$|A(j\omega)| = 20 \log K_p + 20q \log |j\omega| + \sum_{m=1}^M 20 \log \left| j \frac{\omega}{z_m} + 1 \right| - \sum_{n=1}^N 20 \log \left| j \frac{\omega}{p_n} + 1 \right|$$

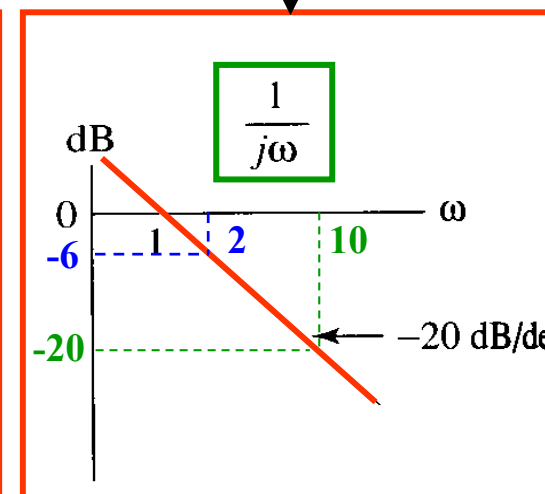
Ceros y polos fuera del origen



Constante



Cero en el origen



Polo en el origen

Pendientes: 20 dB/dec = 6 dB/oct

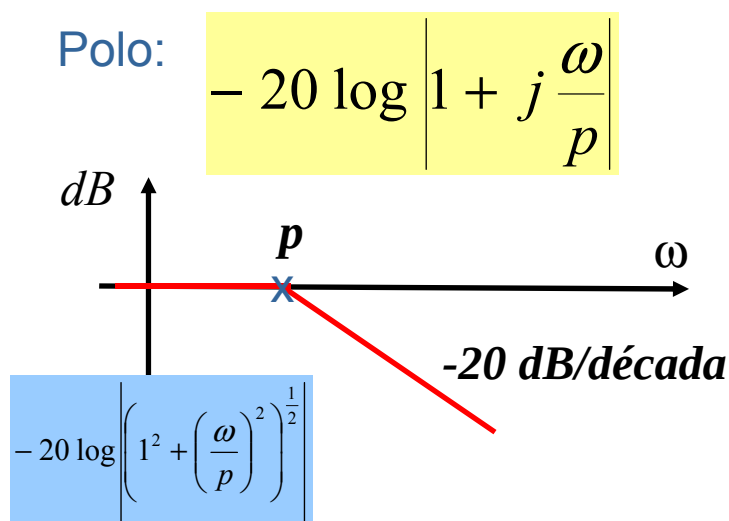


Diagramas de Bode

Términos básicos: Módulo



- Polos y ceros en valores de $\omega=a$ (reales) se descomponen en dos tramos: antes y después de 'a'.

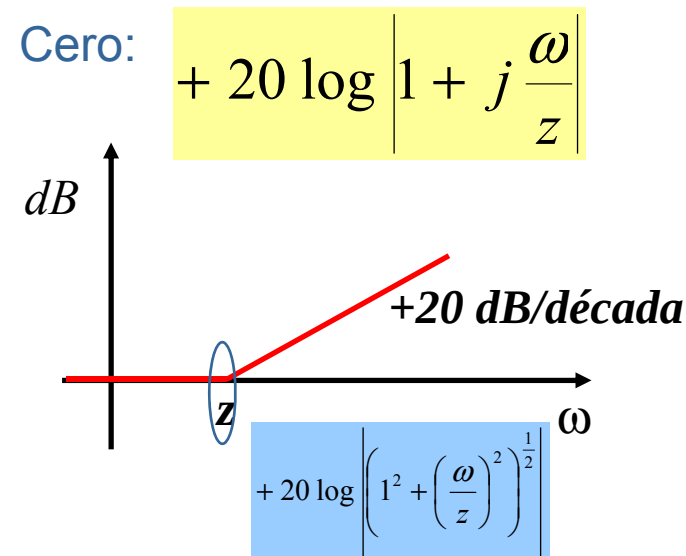


Aproximaciones lineales: **polo**

- para $(\omega < p) \rightarrow 20 \cdot \log(1) = \mathbf{0dB}$
- para $(\omega > p) \rightarrow \mathbf{-20 \cdot \log(\omega/p)}$



Recta de pte. **-20dB/dec**
(-6dB/oct) que empieza en **p**.



Aproximaciones lineales: **cero**

- para $(\omega < z) \rightarrow 20 \cdot \log(1) = \mathbf{0dB}$
- para $(\omega > z) \rightarrow \mathbf{+20 \cdot \log(\omega/z)}$



Recta de pte. **+20dB/dec**
(+6dB/oct) que empieza en **z**.

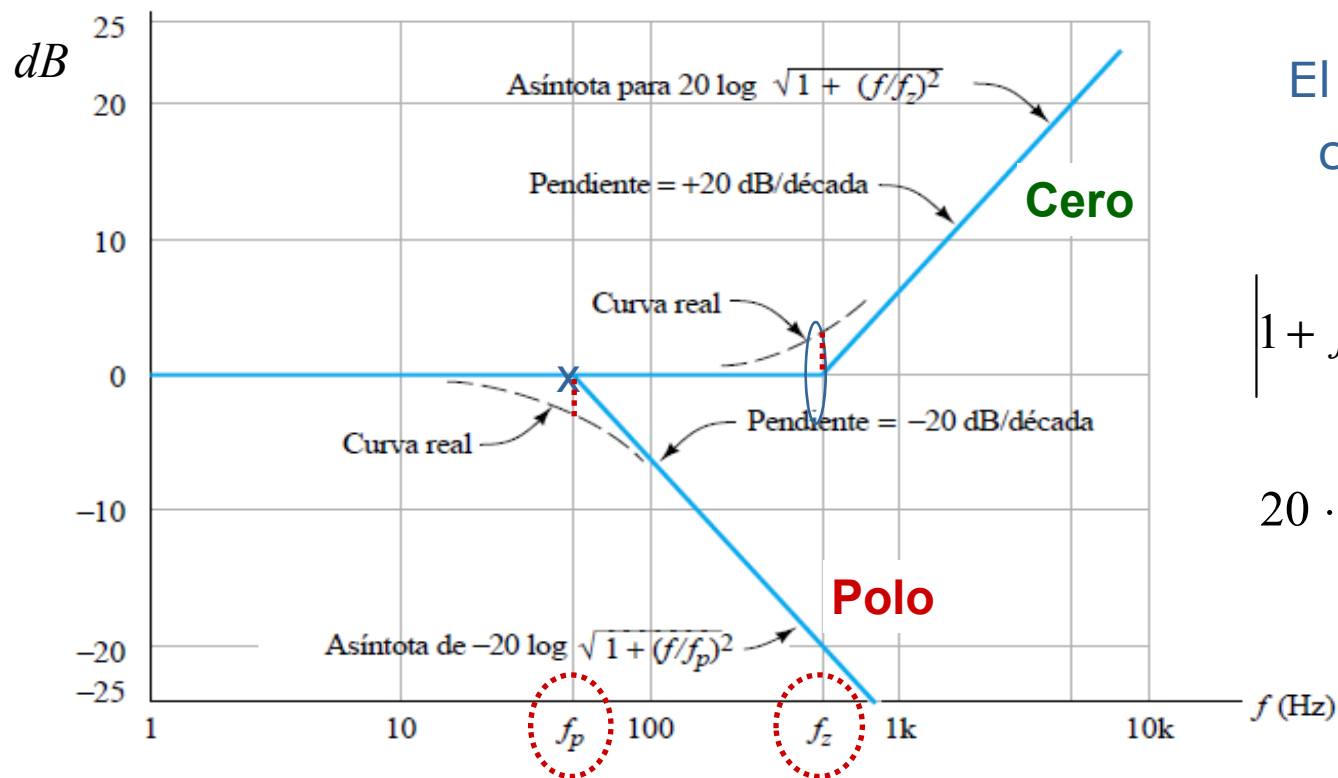


Diagramas de Bode

Términos básicos: Módulo



- ❑ La aproximación asintótica (rectas) de la función real (curva) está sujeta a un error, conocido y tolerable:
- El **máximo de este error** se da en $\omega=a$
 - En dB, este máximo de error es de: **-3dB** (polo), ó **+3dB** (cero)



El valor exacto de la curva con cero en $(\omega=a)$ es:

$$\left| 1 + j \frac{\omega}{a} \right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



$$20 \cdot \log \sqrt{2} = 3,01 \approx 3$$



3dB



Diagramas de Bode

Términos básicos: Fase



- La fase también puede obtenerse fácilmente
 - Es la suma de varias contribuciones elementales

$$\Phi[A(\omega)] = \Phi(K_p) + \Phi \left[\frac{(j\omega)^q \left(1 + \frac{j\omega}{z_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{z_M}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{p_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{p_2}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{p_N}\right)} \right]$$

- Expresión **exacta** de la fase de $A(\omega)$:

$$\Phi[A(\omega)] = \Phi_{K_p} + q \cdot \Phi(j\omega) + \sum_{m=1}^M \arctan \left[\frac{\omega}{z_m} \right] - \sum_{n=1}^N \arctan \left[\frac{\omega}{p_n} \right]$$

$$\Phi_K = \arctg \left(\frac{0}{K_p} \right) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } K_p > 0 \\ \mp 180^\circ & \text{si } K_p < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi(j\omega) &= \arctg \left(\frac{\omega}{0} \right) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2} \\ \Phi(-j\omega) &= \arctg \left(\frac{-\omega}{0} \right) = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



+90°, por cada cero en el origen
-90°, por cada polo en el origen



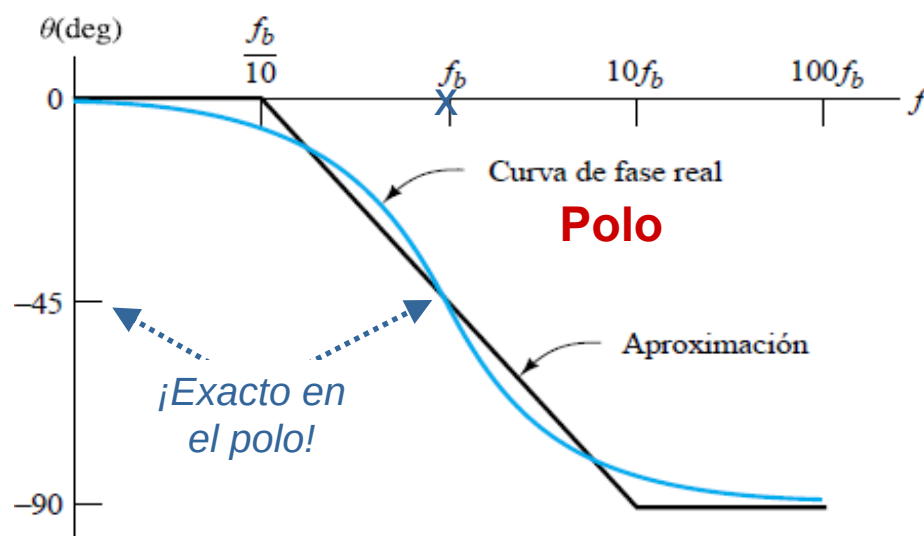
Diagramas de Bode

Términos básicos: Fase



□ Los términos más complicados se *linealizan* en tres tramos

■ **Estimaciones** lineales: fases de polos-ceros en $\omega=a$



Valores exactos:

$$\arctan \left[\frac{\omega}{a} \right]$$

$$\begin{cases} \omega = a / 10 & \Rightarrow & \varphi = \arctan (1 / 10) = 5,7^\circ \approx 0^\circ \\ \omega = a & \Rightarrow & \varphi = \arctan (1) = 45^\circ \\ \omega = 10 \cdot a & \Rightarrow & \varphi = \arctan (10) = 84,3^\circ \approx 90^\circ \end{cases}$$

Criterios de *linealización* :

- Cada **polo** (cero) introduce **-90°** (+90°) de desfase total en un intervalo de **dos décadas** alrededor de su valor, 'a'.
- La pendiente de variación es de **-45°/dec** (+45°/dec)



Diagramas de Bode

Ejemplo

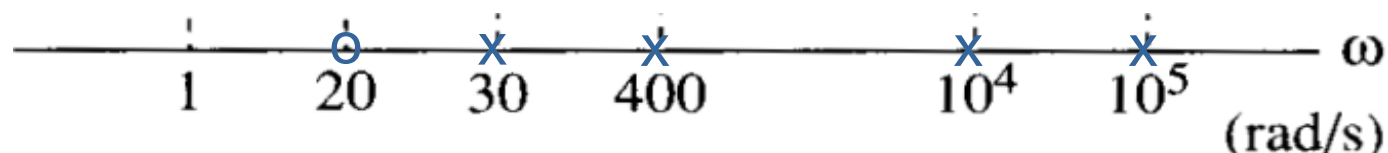


- Representar el módulo de la función de transferencia siguiente:

$$A(s) = \frac{8 \cdot 10^{13} s(s + 20)}{(s + 30)(s + 400)(s + 10^4)(s + 10^5)}$$

- 1) Identificamos la posición de polos y ceros:

Un ○ en origen, resto en:



- En cada **polo** o **cero**, el módulo experimenta el cambio de pendiente que corresponda a cada caso:
 - ✓ Desde una pendiente inicial, marcada por los polos/ceros en el origen, se va modificando la pendiente según crece ω .



Diagramas de Bode

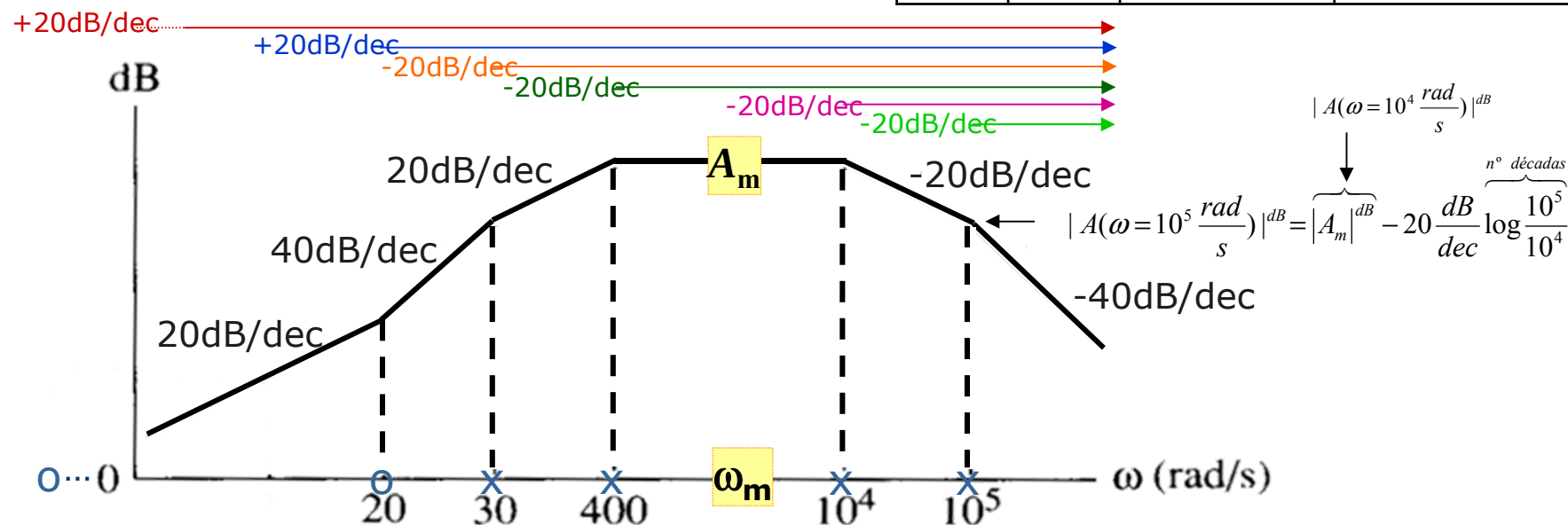
Ejemplo



2) Trazado de la función aproximada:
pendientes y cambios

$$A(s) = \frac{8 \cdot 10^{13} s(s + 20)}{(s + 30)(s + 400)(s + 10^4)(s + 10^5)}$$

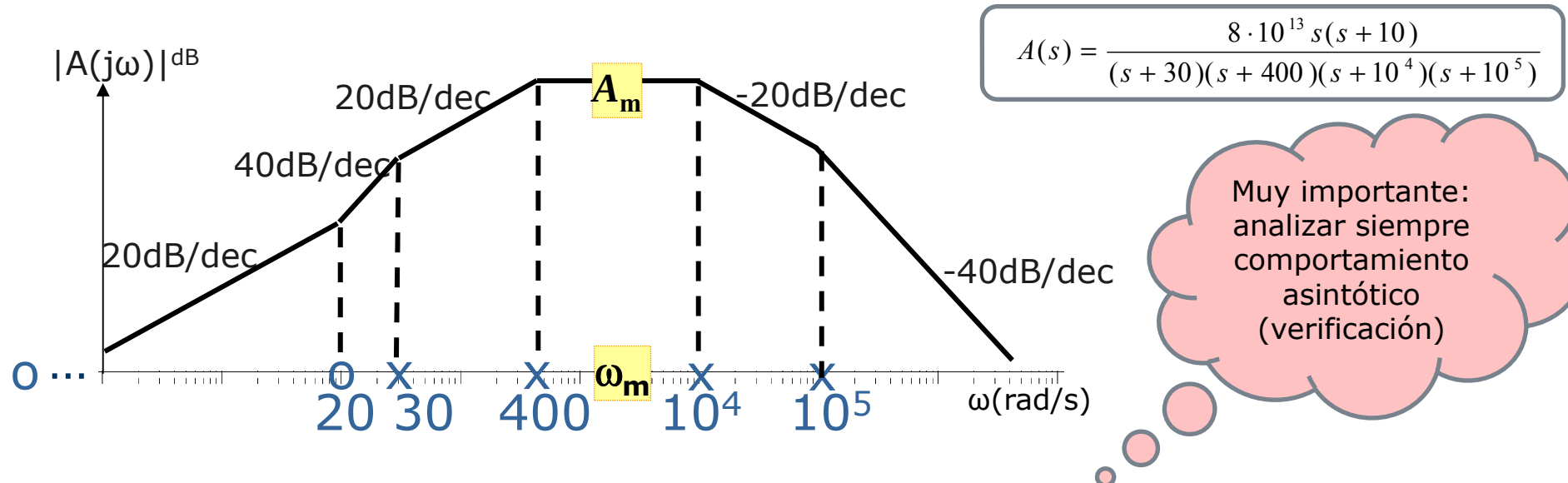
ω	tipo	cambio	pendiente
0	cero	<i>inicial</i>	+20dB/dec
20	cero	+20dB/dec	+40dB/dec
30	polo	-20dB/dec	+20dB/dec
400	polo	-20dB/dec	0
10^4	polo	-20dB/dec	-20dB/dec
10^5	polo	-20dB/dec	-40dB/dec





Diagramas de Bode

Ejemplo



- 3) Sólo resta identificar un punto (por ejemplo $\omega=1$ rad/s) o, mejor, el nivel **constante** → **ganancia en frecuencias medias**: $400 < \omega_m < 10^4$ (rad/s)

$$A_m = A(s)|_{400 \ll s \ll 10^4} \approx \frac{8 \cdot 10^{13} s(s)}{(s)(s)(10^4)(10^5)} = \frac{8 \cdot 10^{13}}{10^9} = 8 \cdot 10^4 \rightarrow A_m|_{dB} = 98dB$$

frecuencias medias

aproximación en cada binomio

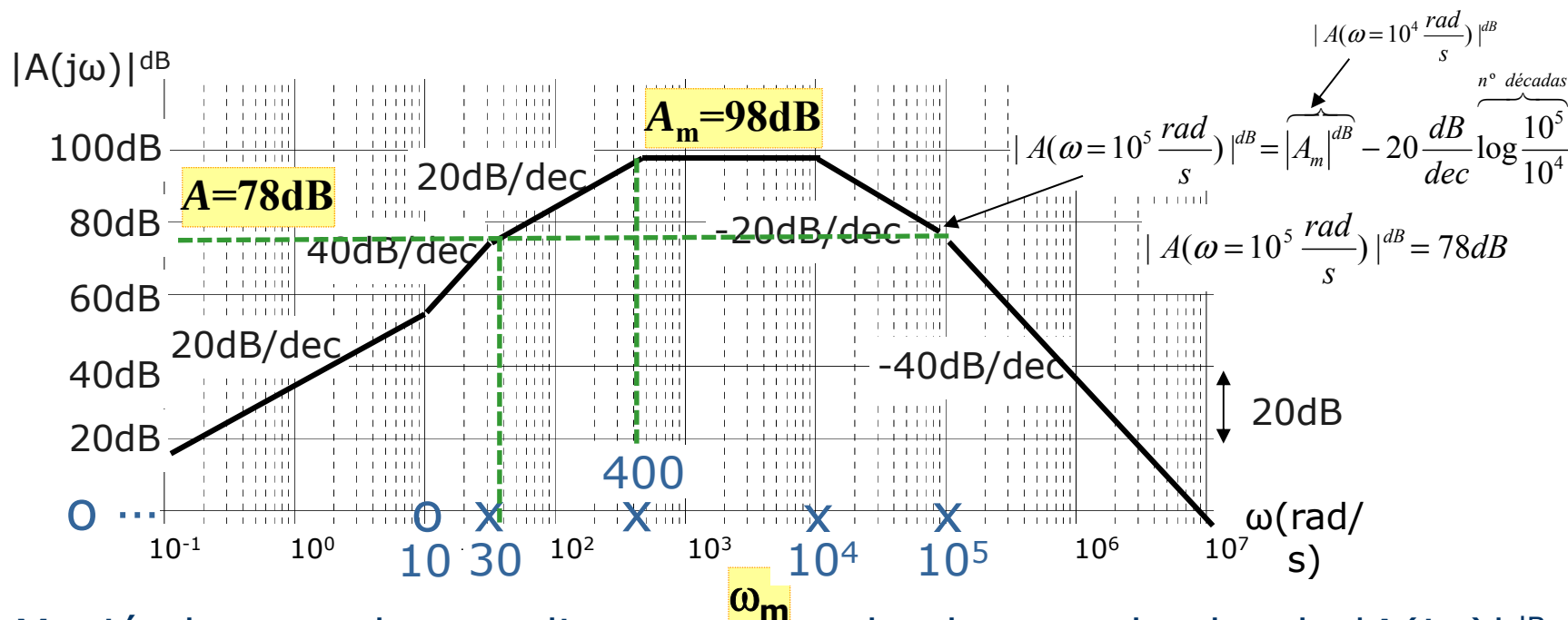
A_m debe ser una constante



Diagramas de Bode Ejemplo



- 4) Conocido el valor de A_m (u otro punto) se puede dibujar la gráfica de módulo en diagrama de Bode, poniendo valores al eje vertical y horizontal



- 5) Moviéndose por las pendientes se puede obtener el valor de $|A(j\omega)|$ en cualquier pulsación:

$$dB_{\omega_{llegada}} = dB_{\omega_{partida}} + \overbrace{\text{pendiente en } dB/dec}^{n^\circ \text{ décadas}} \cdot \log \frac{\omega_{llegada}}{\omega_{partida}}$$

Valor pendiente (+ ó -) en la gráfica



Análisis por bandas de frecuencia

Introducción



- El estudio global de la función de transferencia (f. de t.) es problemático:
 - Un análisis por bandas de frec. reduce la complejidad del problema
 - Ejemplo: análisis en **frecuencias medias** (sólo R y constantes)
- ¿Cómo hacer el análisis por bandas?
 - En cada banda o zona de frecuencias considerar sólo los efectos importantes.
 - Pistas:
 - Cada **polo o cero...**
 - **En módulo**: introduce un **cambio** en la pendiente **desde** su valor en la frecuencia en adelante.
 - **En fase**: su efecto total es un cambio de fase de **90°**, gradualmente desde una **década antes** hasta **otra después** de su valor en f.
 - En **frecuencias medias**:
 - **Todos** los efectos (módulo y signo) están **incluidos**
 - La **clave** es intentar expresar la f. de t. respecto a: A_m



Análisis por bandas de frecuencia

F. de T. en función de la ganancia a frec. medias (A_m)



- Un pequeño truco
 - Ayuda mucho reescribir los binomios de polos y ceros para que la constante K sea precisamente A_m
- Para lograrlo
 - Polos y ceros **antes** de A_m tendrán la forma **(s+a)**
 - Polos y ceros **después** de A_m tendrán la forma **(1+s/a)**

□ Ejemplo anterior:

$$A(s) = \frac{8 \cdot 10^{13} s(s+10)}{(s+30)(s+400)(s+10^4)(s+10^5)}$$

$A(s)$ (f. medias $400 < \omega < 10^4$)

Distinta constante

$$A(s) = \frac{8 \cdot 10^4 s(s+20)}{(s+30)(s+400) \left(1 + \frac{s}{10^4}\right) \left(1 + \frac{s}{10^5}\right)} \Leftrightarrow A_m = 8 \cdot 10^4$$

- Verifique que A_m es un elemento clave en la respuesta en frecuencia de amplificadores



Análisis por bandas de frecuencia

Simplificación de la F. de T. a freq. medias, bajas y altas



□ Así, el ejemplo quedaría...

■ En frecuencias **medias**:

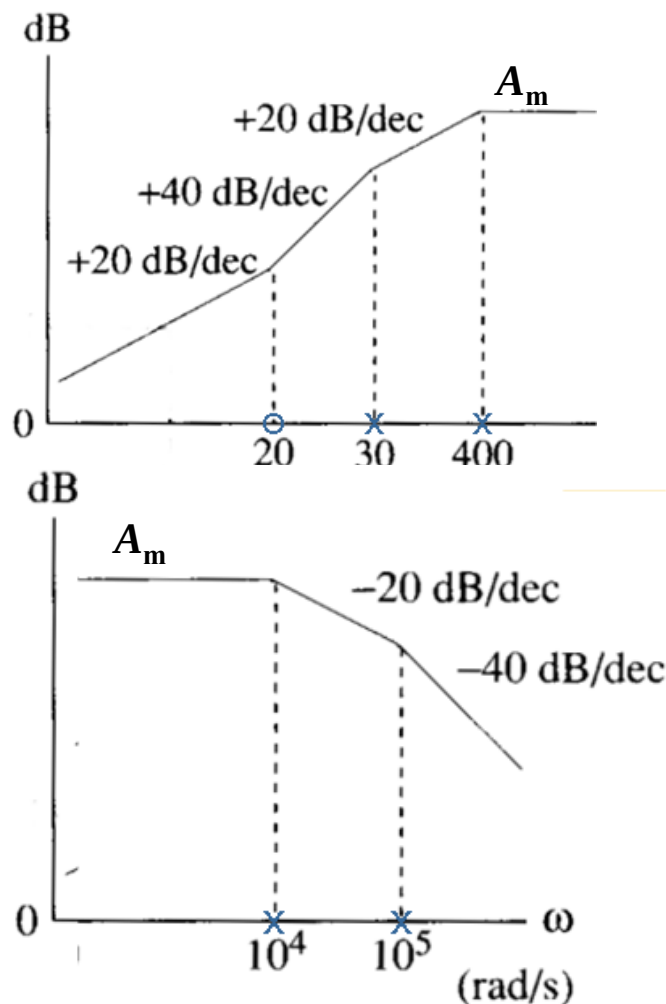
$$A_{FM}(s) = A_m = 8 \cdot 10^4$$

■ En frecuencias **bajas**:

$$A_{BF}(s) = \frac{A_m \cdot s(s + 20)}{(s + 30)(s + 400)}$$

■ En frecuencias **altas**:

$$A_{AF}(s) = \frac{A_m}{\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)\left(1 + \frac{s}{10^5}\right)}$$





Análisis por bandas de frecuencia

Frecuencias de corte



- ❑ Las frecuencias de corte son parámetros fundamentales
 - Cuantifican las frecuencias útiles o Banda de Paso del amplificador
- ❑ Estimación o cálculo manual
 - Ventajoso para el diseñador
 - Para **identificar** qué elementos **influyen** o **modifican** tales frecuencias
 - El análisis de Bode permite hacer esta evaluación
- ❑ Herramientas útiles para el cálculo
 - Separación de $A(s)$ en **bandas**
 - **Extensión** en frecuencia de los **efectos** de polos y ceros
 - Significativos en **entornos de una década** alrededor de su posición
- ❑ **Conclusión importante**
 - **Polos y ceros no se interfieren entre sí, si están alejados más de una década unos de otros**

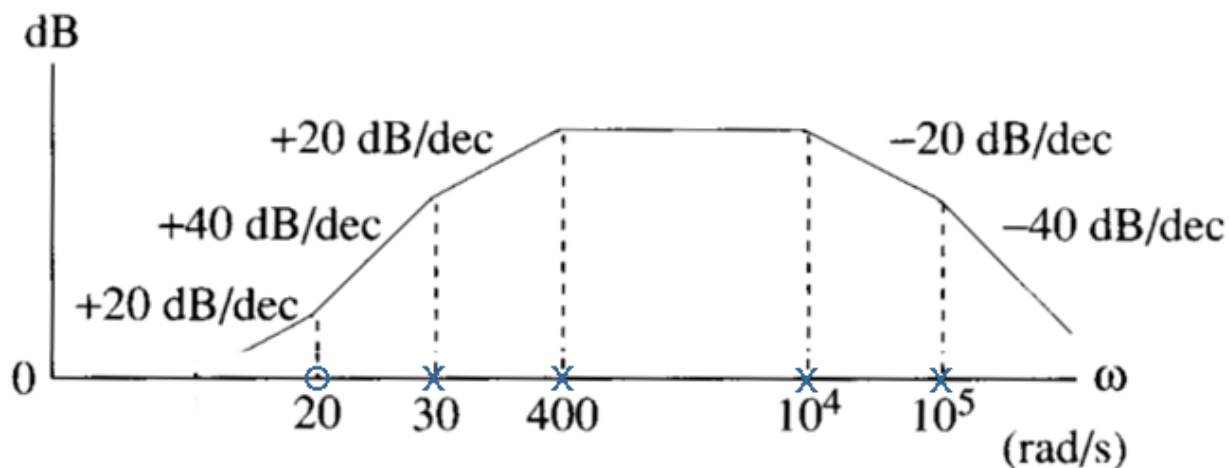


Análisis por bandas de frecuencia

Frecuencias de corte en F. de T. con polo/s dominante/s



- ❑ Aquellos polos más próximos a la **zona de frecuencias medias** y **separados más de una década** de otros polos/ceros
 - Al no verse afectados por el resto de polos/ceros, el módulo de $A(\omega)$ en su valor es inferior en 3dB al valor de A_m
 - Entonces: las frecuencias de corte coinciden con las del polo si éste es dominante
- ❑ ¿Cuáles son las frecuencias de corte f_H y f_L del siguiente ejemplo?



$$(f_H = \omega_H / 2\pi, f_L = \omega_L / 2\pi)$$

Solución

$$f_H = \frac{10^4}{2\pi} = 1,6 \text{ kHz}$$

$$f_L = \frac{400}{2\pi} = 63,6 \text{ Hz}$$

$$BW = f_H - f_L \approx f_H = 1,6 \text{ kHz}$$



Análisis por bandas de frecuencia

Frecuencias de corte en F. de T. sin polo/s dominante/s

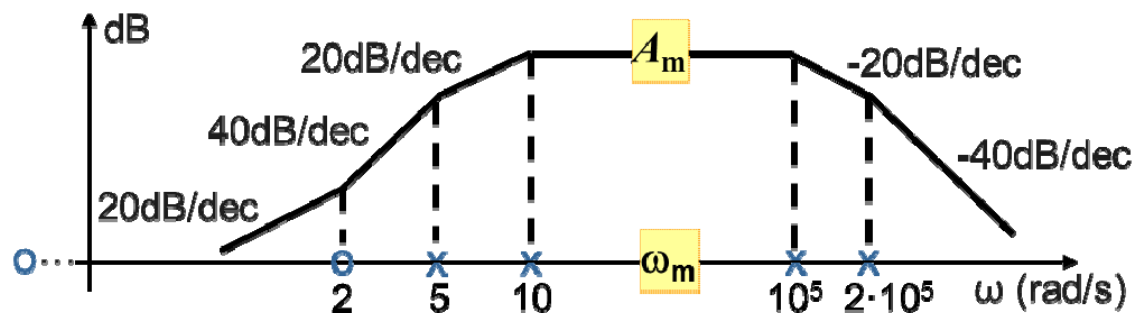


❑ Necesario un cálculo matemático

- Aplicamos la definición de frecuencia de corte $|A(jw)| = \frac{|A_m|}{\sqrt{2}} \rightarrow w?$
- Podemos simplificar la función a calcular tomando sólo los polos y ceros significativos más próximos a A_m

❑ Ejemplo: Obtener la ω_H de la ganancia de corriente dada por:

$$A_I(s) = \frac{A_m s(s+2)}{(s+5)(s+10) \left(1 + \frac{s}{10^5}\right) \left(1 + \frac{s}{2 \cdot 10^5}\right)}$$



Respuesta en frecuencia



Análisis por bandas de frecuencia

Frec.'s de corte en F. de T. sin polo/s dominante/s. Ej.



Dada: $A_I(s) = \frac{A_m s(s+2)}{(s+5)(s+10) \left(1 + \frac{s}{10^5}\right) \left(1 + \frac{s}{2 \cdot 10^5}\right)}$

$$\begin{cases} A_{I_BF}(s) \Big|_{s \ll 10^5} = \frac{A_m s(s+2)}{(s+5)(s+10)} \\ A_{I_AF}(s) \Big|_{s \gg 10} = \frac{A_m}{\left(1 + \frac{s}{10^5}\right) \left(1 + \frac{s}{2 \cdot 10^5}\right)} \end{cases}$$

Calculo de $\mathbf{w_H}$ considerando sólo los polos significativos:

$$|A_I(\omega_H)| = \frac{A_m}{\left|1 + \frac{j\omega_H}{10^5}\right| \cdot \left|1 + \frac{j\omega_H}{2 \cdot 10^5}\right|} = \frac{A_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_H}{10^5}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_H}{2 \cdot 10^5}\right)^2}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{w_H}$$

¿Cómo se calcularía la $\mathbf{w_L}$ (considerando sólo los polos significativos)?

$$|A_I(\omega_L)| = \frac{A_m |j\omega_L| \cdot |j\omega_L + 2|}{|j\omega_L + 5| \cdot |j\omega_L + 10|} = \frac{A_m \cdot \omega_L \cdot \sqrt{\omega_L^2 + 4}}{\sqrt{\omega_L^2 + 25} \cdot \sqrt{\omega_L^2 + 10^2}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{w_L}$$

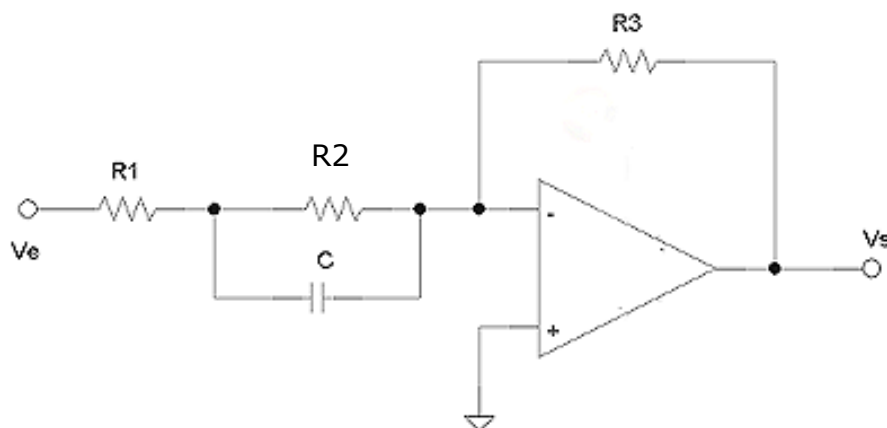


Otras aplicaciones básicas

Basadas en Amplificador Operacional ideal



- Ejemplo 2: amplificador con un cero y un polo.
 - El análisis se facilita trabajando con $Z \rightarrow$ identificamos un inversor...



$$\begin{cases} Z_1 = R_1 + R_2 \parallel Z_C \\ Z_2 = R_3 \end{cases}$$



$$G_v(s) = \frac{-Z_2}{Z_1} = -\frac{R_3}{Z_1} = -\frac{R_3(sCR_2 + 1)}{R_1 + R_2 + sCR_1R_2}$$

$$G_v(s) = -\frac{R_3}{R_2 + R_1} \cdot \frac{1 + s\overbrace{CR_2}^{\omega_0}}{1 + s\frac{CR_1R_2}{\underbrace{R_1 + R_2}_{\omega_p}}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{CR_2} \\ \omega_p = \frac{1}{C(R_1 \parallel R_2)} \end{array} \right\} \rightarrow G_v(s) = -\frac{R_3}{R_2 + R_1} \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

- Comprobación $\rightarrow$ ganancias para las frecuencias límite:

- Para $s=0$ ($\omega=0$): $G_v(0) = \frac{-R_3}{R_2 + R_1}$

- Para $s \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$): $G_v(\infty) = \frac{-R_3}{R_1}$

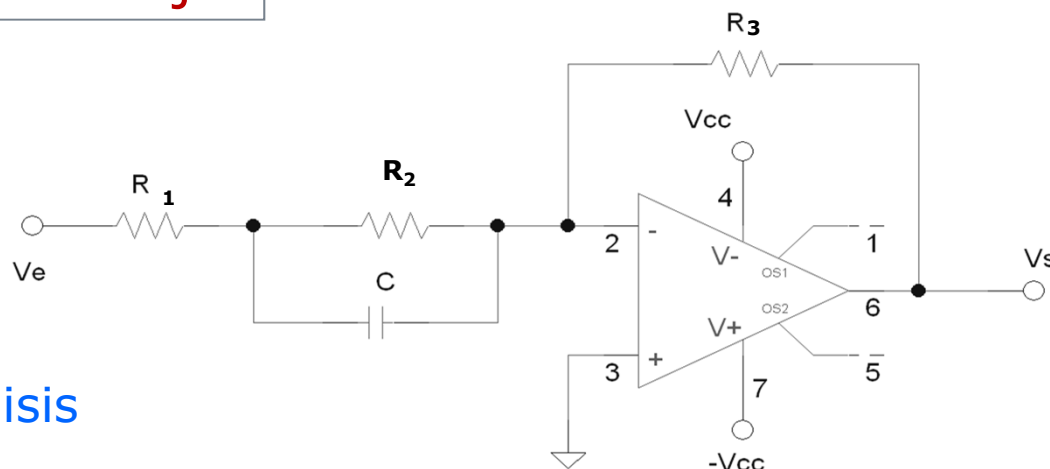


Otras aplicaciones básicas

Ejemplo: Filtro Paso Alto con polo-cero con A.O. ideal



Análisis en $j\omega$



Análisis

Datos:

$$\omega_0 = \frac{1}{C R_2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{C (R_1 \parallel R_2)}$$

$$\omega_p \gg \omega_0$$

$$G(\omega) = -\frac{R_3}{Z} = -\frac{R_3}{\frac{R_2}{j\omega C R_2 + 1} + R_1} = -\frac{R_3(j\omega C R_2 + 1)}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} = -\frac{R_3}{R_2 + R_1} \frac{j\omega C R_2 + 1}{1 + j\omega \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = -\frac{R_3}{R_2 + R_1} \frac{\frac{j\omega}{\omega_0} + 1}{\frac{j\omega}{\omega_p} + 1}$$

$$\text{O su equivalente: } G(\omega) = -\frac{R_3}{R_2 + R_1} \frac{\omega_p}{\omega_0} \frac{j\omega + \omega_0}{j\omega + \omega_p} = -\frac{R_3}{R_1} \frac{j\omega + \omega_0}{j\omega + \omega_p} \begin{cases} |G(\omega)|_{\omega=0} = \frac{R_3}{R_2 + R_1} = G_c \\ |G(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{R_3}{R_1} = G_m \end{cases}$$

La ganancia disminuye al disminuir la frecuencia: **FILTRO PASO ALTO**



Otras aplicaciones básicas

Ejemplo: Filtro Paso Alto con polo-cero con A.O. ideal



Cálculo de la pulsación de corte w_L de : $G(w) = -\frac{R_3}{R_1} \frac{jw + w_0}{jw + w_p}$; $w_p \gg w_0$

Como $w_p \gg w_0 \rightarrow \mathbf{w_L \approx w_p}$

(polo dominante)

¿Cómo se calcularía w_L si $w_p > w_0$ (w_p no es un polo dominante)?

Definición: $|G(w)| = \frac{R_3}{R_1} \frac{(w_L^2 + w_0^2)^{1/2}}{(w_L^2 + w_p^2)^{1/2}} = \frac{|G_m|}{2^{1/2}} = \frac{R_3}{R_1} \frac{1}{2^{1/2}}$

$$2 (w_L^2 + w_0^2) = (w_L^2 + w_p^2) \rightarrow w_L = (w_p^2 - 2w_0^2)^{1/2}$$

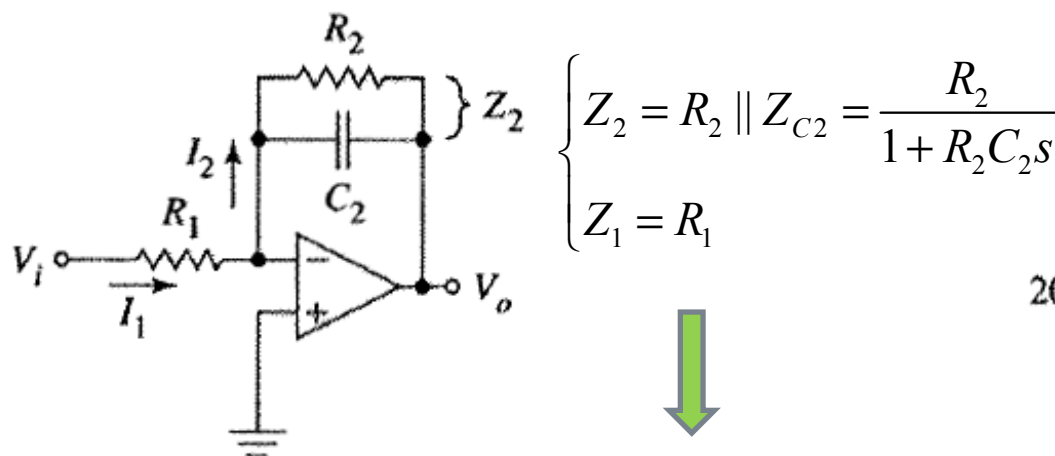


Otras aplicaciones Básicas

Basadas en Amplificador Operacional ideal

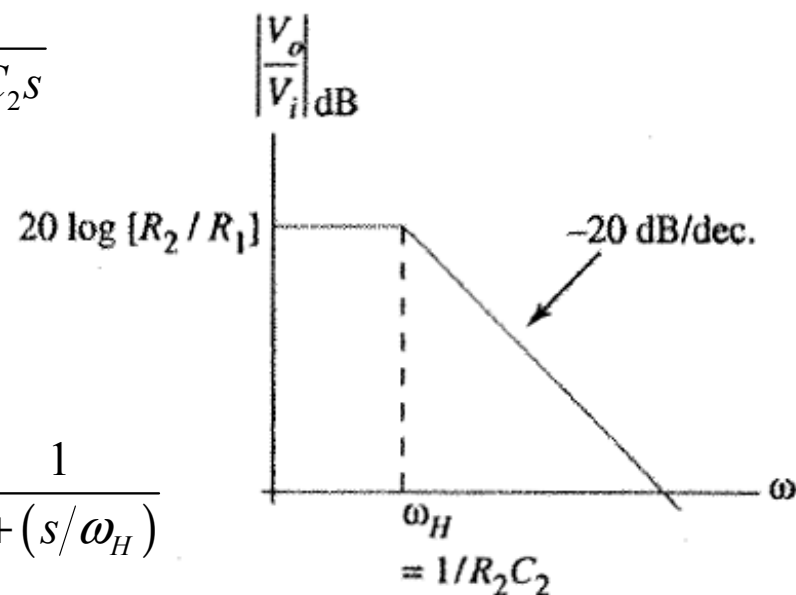


- ❑ **1.-Filtro paso bajo**, de orden 1 (un solo polo)
 - Hallar la ganancia en función de 's' (o de $j\omega$) es sencillo.
 - El **objetivo del análisis** es identificar los parámetros de su respuesta en frecuencia: A_m , los **polos** y **ceros** de $A(\omega)$, y los componentes del circuito que afectan a cada parámetro.



$$\begin{cases} Z_2 = R_2 \parallel Z_{C_2} = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s} \\ Z_1 = R_1 \end{cases}$$

$$G_V(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{-R_2}{R_1(1 + R_2 C_2 s)} = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + (s/\omega_H)}$$

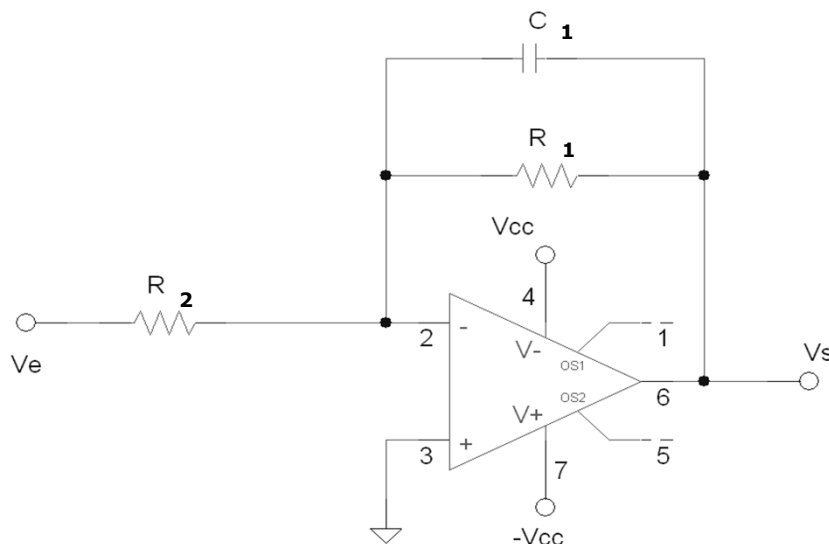


→ **Ejemplo:** ¿**Cómo** podría **cambiarse** la ω_H del filtro sin cambiar A_m ?



Otras aplicaciones básicas

Análisis de diseño tipo: F. P. Bajo básico con A.O. ideal



Análisis en jw

$$G(w) = \frac{V_s}{V_e}(w) = -\frac{Z}{R_2} = -\frac{R_1 \parallel \frac{1}{jwC_1}}{R_2}$$

$$G(w) = -\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{1 + jwC_1R_1} = -\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{1 + \frac{jw}{w_1}} ; w_1 = \frac{1}{R_1C_1}$$

Límites de $G(w)$ en módulo:

$$\begin{cases} |G(w)|_{w=0} = \frac{R_1}{R_2} = G_m \\ |G(w)|_{w \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

En este caso:

$w = 0$: ganancia máxima $\rightarrow$ **Ganancia para frec. medias: $G_m = R_1/R_2$**

$w \rightarrow \infty$: Ganancia cero

La ganancia disminuye al aumentar la frecuencia:

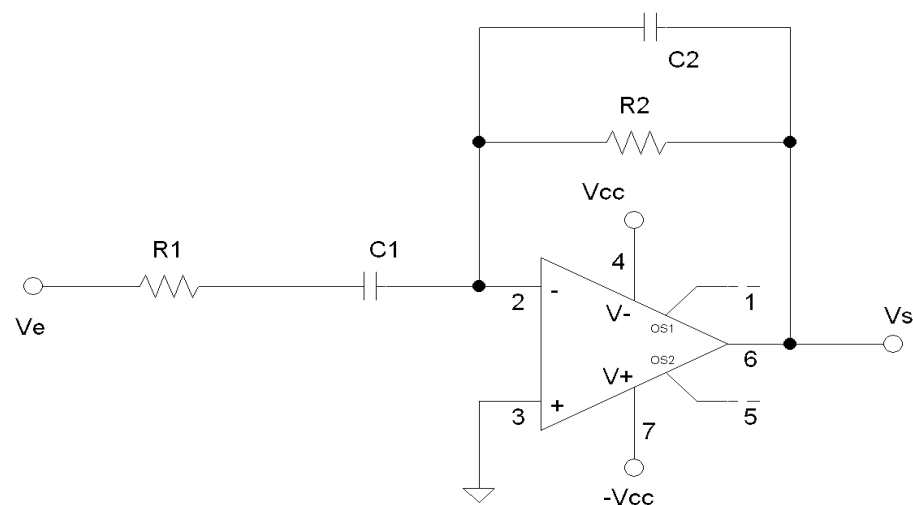
FILTRO PASO BAJO



Otras configuraciones básicas



Paso Banda



Calcule los valores de G_m , W_H y W_L



Problema propuesto nº 3 (2/4)



■ a) Representación del diagrama de Bode

$|A_O| = 80\text{dB}$

$f_a: 1\text{kHz}$ $f_b: 10\text{kHz}$ $f_c: 200\text{kHz}$

